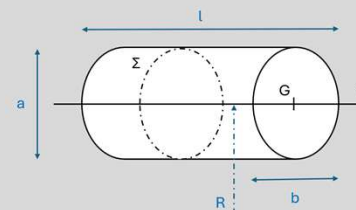
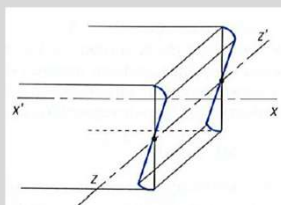




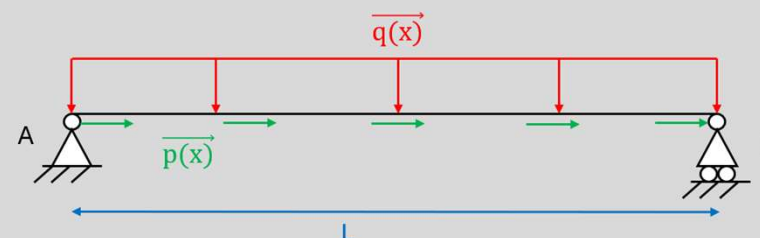
Hypothèses de la théorie des poutres



1 - Définition d'une poutre



2 - Hypothèse de Navier-Bernouilli



3 - Hypothèse de Saint-Venant

4 - Principe de superposition

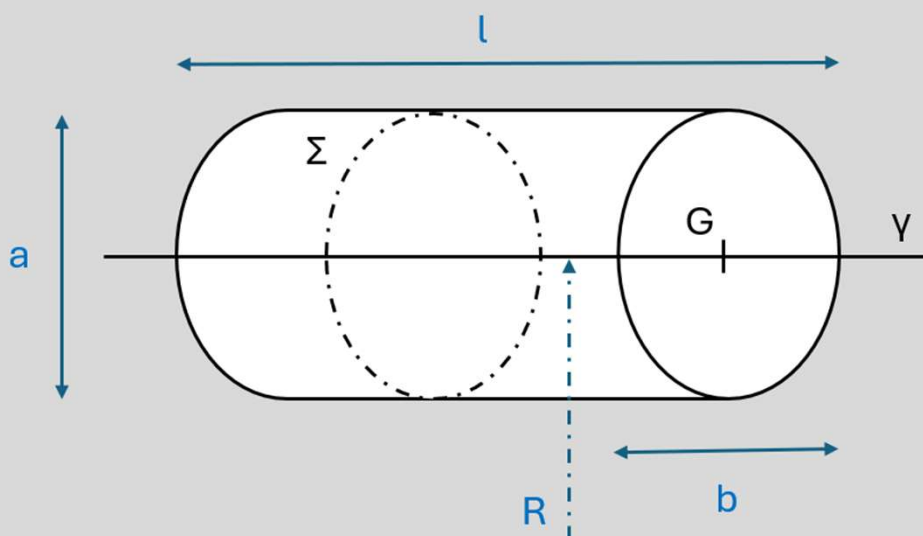
5 - Comportement des matériaux



1 - Définition d'une poutre



Une poutre est un solide engendré par une surface plane Σ (lettre majuscule grecque SIGMA) dont le centre de gravité G décrit une courbe γ (lettre minuscule grecque GAMMA), γ restant perpendiculaire au plan décrit par Σ (on dit que γ se trouve sur la normale à Σ passant par G et on l'appelle : fibre moyenne)



La théorie des poutres est valable si :

$$b < a < 10.b$$

Le rayon de courbure $R \geq 5.b$

La portée L doit également vérifier :

$$\frac{1}{30} < \frac{a}{L} < \frac{1}{5}$$

Le rayon de courbure : R

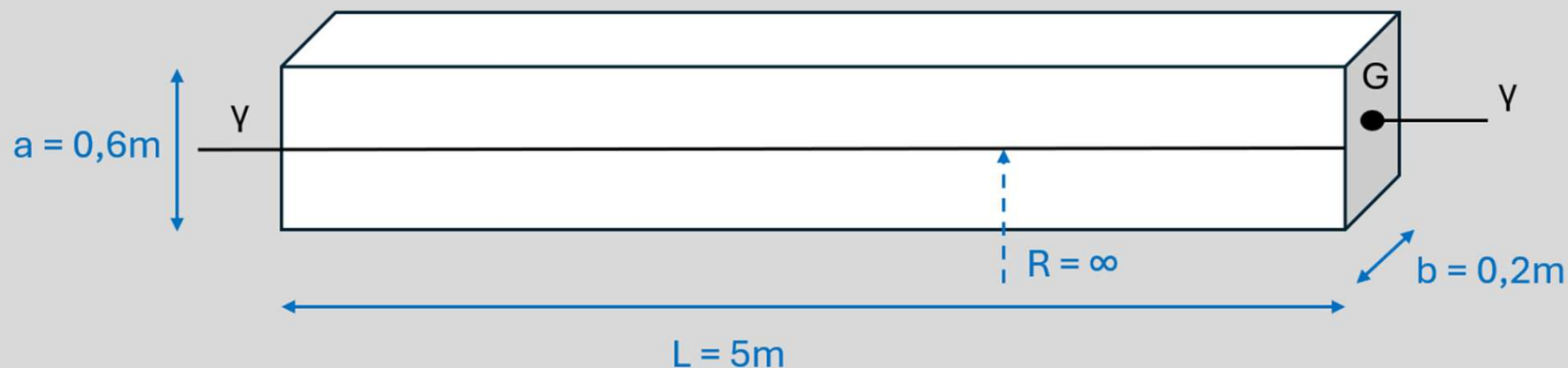
$R \geq 5.b$	Théorie d'Euler-Bernoulli applicable
$5.b > R \geq b$	Théorie des poutres courbes nécessaire (Timoshenko ...)
$R < b$	Théorie des coques nécessaires (comportement de type « plaque courbe »)
$R = \infty$	Poutre droite $\rightarrow$ théorie classique toujours valable



1 - Définition d'une poutre



Exemple



La théorie des poutres est valable si :

$$b < a < 10 \cdot b$$
$$0,2 < 0,6 < 10 \times 0,2$$
$$0,2 < 0,6 < 2$$

VRAI

Le rayon de courbure $R \geq 5 \cdot b$

$$R = \infty$$

Poutre droite

La portée L doit également vérifier :

$$\frac{1}{30} < \frac{a}{L} < \frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{30} < \frac{0,6}{5} < \frac{1}{5}$$
$$0,033... < 0,12 < 0,2$$

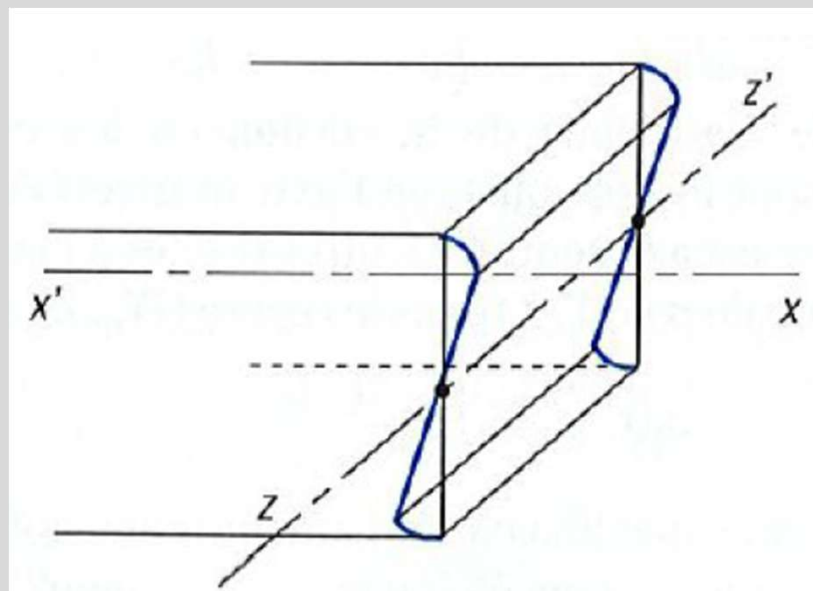
VRAI



2 - Hypothèse de Navier-Bernouilli



Les sections droites restent planes après déformation.

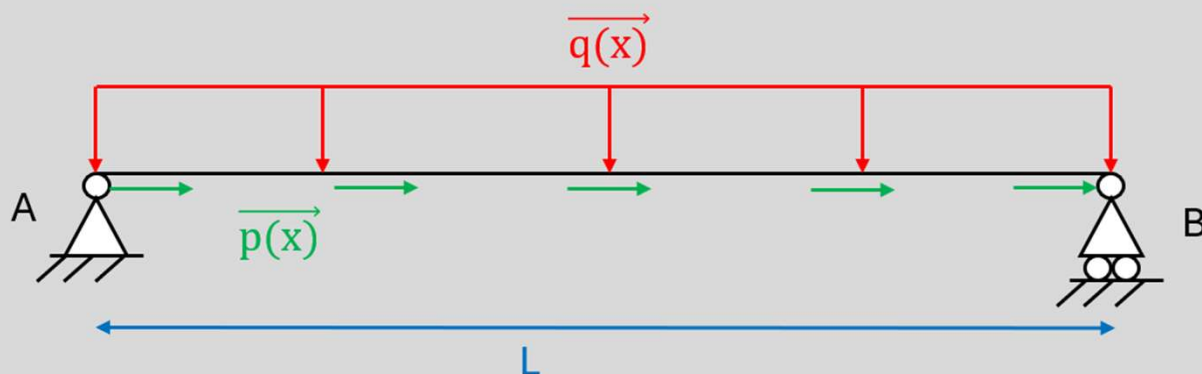




3 - Hypothèse de Saint-Venant



La RDM (Résistance Des Matériaux) n'est valable que loin du point d'application des forces



L'étude d'un tronçon de la poutre de longueur dx nous permet d'obtenir les relations suivantes :

$$V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$$

$$p(x) = -\frac{dN(x)}{dx}$$

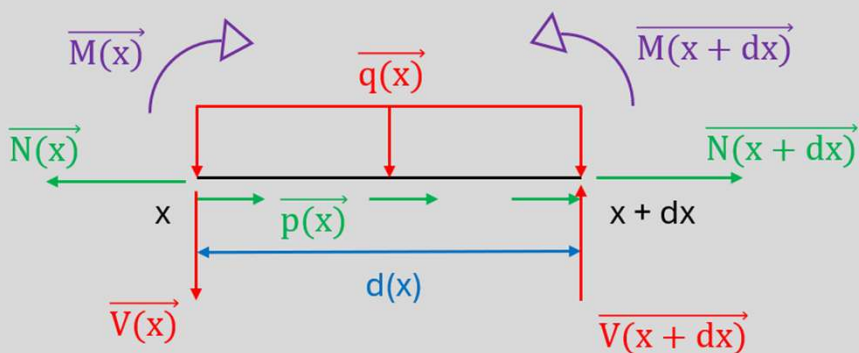
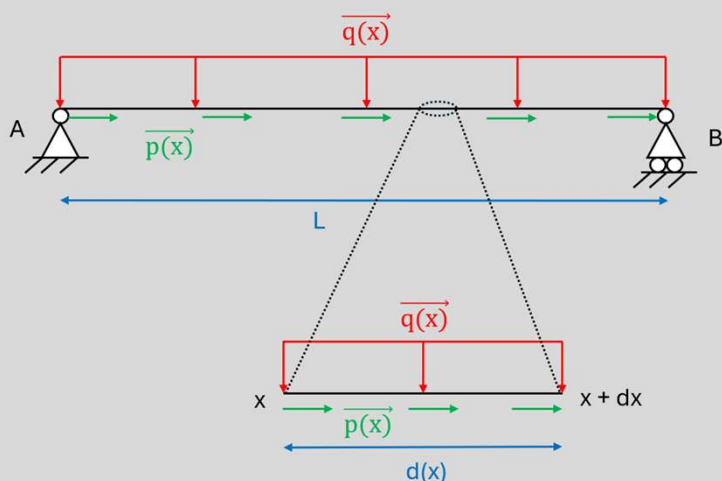
$$q(x) = \frac{dV(x)}{dx} = -\frac{d^2M(x)}{dx^2}$$



3 - Hypothèse de Saint-Venant



3.1 - Démonstration de : $q(x) = \frac{dV}{dx}$



Équilibre des forces verticales :

PFS : Principe Fondamental de la Statique

$$\Sigma V = 0 \rightarrow -V(x) + V(x+dx) - q(x) \cdot dx = 0$$

Sachant que (développement limité au 3.6):

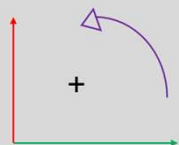
$$V(x+dx) = V(x) + V'(x)dx = V(x) + \frac{dV}{dx}dx + 0(dx)$$

Donc :

$$\Sigma V = 0 \rightarrow -V(x) + \left(V(x) + \frac{dV}{dx}dx \right) - q(x) \cdot dx = 0$$

$$\Sigma V = 0 \rightarrow -V(x) + V(x) + \frac{dV}{dx}dx - q(x) \cdot dx = 0$$

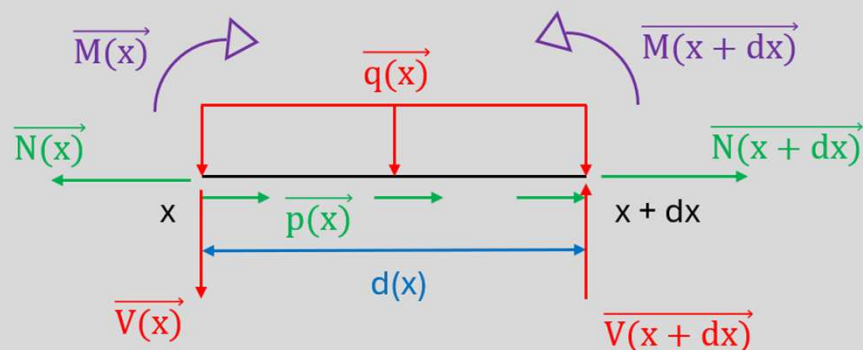
$$\Sigma V = 0 \rightarrow \frac{dV}{dx} = q(x)$$



3 - Hypothèse de Saint-Venant



3.2 - Démonstration de : $V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$



Équilibre des moments à gauche :

$$\Sigma M = 0$$

$$\rightarrow -M(x) + M(x + dx) + V(x + dx)dx$$

$$- q(x)dx \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

Sachant que (développement limité au 3.6) :

$$M(x + dx) = M(x) + \frac{dM}{dx}dx + 0(dx)$$

$$(V(x + dx))dx = V(x)dx + (V'(x)dx)dx$$

On néglige les termes en dx^2

$$(V(x + dx))dx = V(x)dx$$

Et aussi : $q(x)dx \cdot dx = 0$

Donc :

$$\Sigma M = 0$$

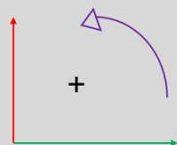
$$\rightarrow -M(x) + \left(M(x) + \frac{dM}{dx}dx \right) + V(x)dx = 0$$

$$\Sigma M = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx}dx + V(x)dx = 0$$

$$\Sigma M = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} + V(x) = 0$$

$$\Sigma M = 0 \rightarrow V(x) = -\frac{dM}{dx}$$

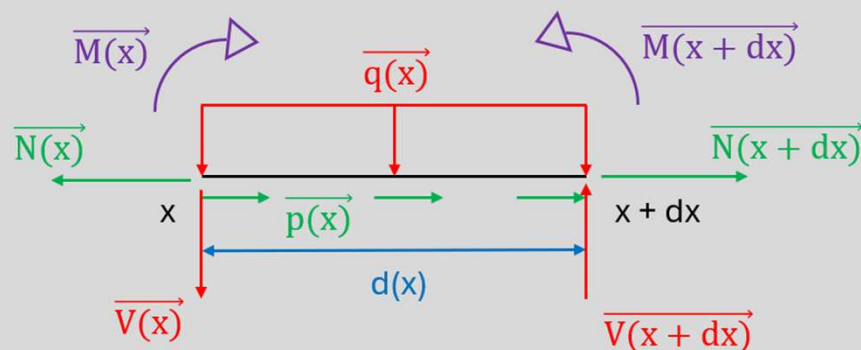
$x = 0,01$
 $x^2 = 0,0001$
100 fois plus petit



3 - Hypothèse de Saint-Venant



3.3 - Démonstration de : $p(x) = -\frac{dN(x)}{dx}$



Équilibre des forces horizontales :

$$\Sigma N = 0 \rightarrow -N(x) + N(x + dx) + p(x).dx = 0$$

Sachant que (développement limité au 3.6) :

$$N(x + dx) = N(x) + \frac{dN}{dx} dx + 0(dx)$$

Donc :

$$\Sigma N = 0 \rightarrow -N(x) + \left(N(x) + \frac{dN}{dx} dx \right) + p(x).dx = 0$$

$$\Sigma N = 0 \rightarrow \frac{dN}{dx} dx + p(x).dx = 0$$

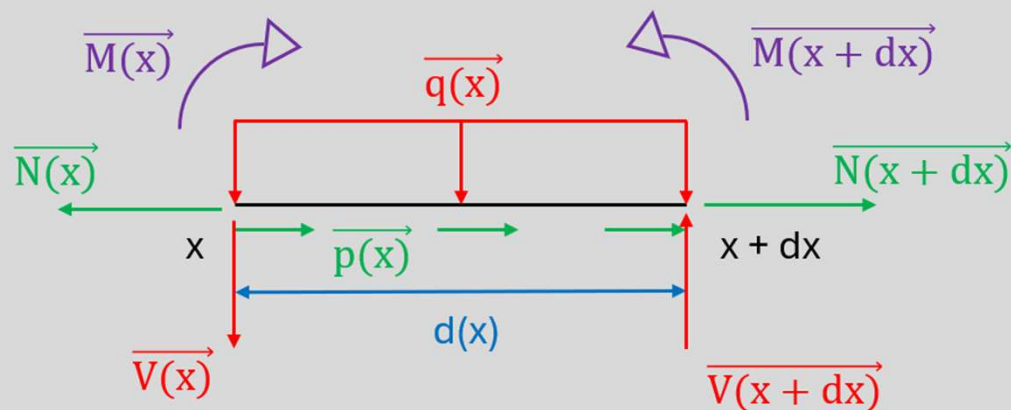
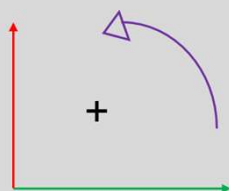
$$\Sigma N = 0 \rightarrow p(x) = -\frac{dN}{dx}$$



3 - Hypothèse de Saint-Venant



3.4 - Démonstration de : $q(x) = -\frac{d^2M(x)}{dx^2}$



Au 3.2 :

$$V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$$

En dérivant une 2^e fois par rapport à x :

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{d^2M(x)}{dx^2}$$

Au 3.1 :

$$q(x) = \frac{dV}{dx}$$

Soit :

$$q(x) = -\frac{d^2M(x)}{dx^2}$$



3 - Hypothèse de Saint-Venant



3.5 - Synthèse des résultats

3.1

$q(x) = \frac{dV(x)}{dx}$ la charge verticale répartie est la dérivée de l'effort tranchant

3.2

$V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$ l'effort tranchant est la dérivée négative du moment fléchissant

3.3

$p(x) = -\frac{dN(x)}{dx}$ la charge axiale répartie est la dérivée négative de l'effort normal

3.4

$q(x) = -\frac{d^2M(x)}{dx^2}$ la charge verticale est la dérivée seconde négative du moment



3 - Hypothèse de Saint-Venant



3.6 - Le développement limité

Définition

Un développement limité (DL) est une approximation polynomiale d'une fonction $f(x)$ au voisinage d'un point a , basé sur ses dérivées successives.

Formule générale (à l'ordre 1)

Pour une fonction $f(x)$ dérivable en a , on a :

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h + 0(h)$$

Où : $f(a)$ est la valeur de la fonction en a

$f'(a)$ est sa dérivée en a

$0(h)$ représente des termes négligeables devant h

Application en RDM

$$N(x + dx) \approx N(x) + \frac{dN(x)}{dx} dx + 0(dx)$$

$$V(x + dx) \approx V(x) + \frac{dV(x)}{dx} dx + 0(dx)$$

$$M(x + dx) \approx M(x) + \frac{dM(x)}{dx} dx + 0(dx)$$

Pourquoi
néglige-
t-on
 $0(dx)$?

Le terme $0(dx)$ représente une quantité infiniment petite d'ordre supérieur (comme dx^2 , dx^3 , ...)

Quand dx tend vers 0, ce terme devient négligeable devant dx .



4 - Principe de superposition



En élasticité, les relations entre les forces appliquées, les contraintes et les déformations sont linéaires et homogènes.

5 - Comportement des matériaux

On considère que les déplacements et les déformations restent faibles et lents (transformations réversibles) : les matériaux ont donc un comportement élastique.

FIN

Hypothèses de la théorie
des poutres